Aide mémoire

Liste de symboles mathématiques les plus utilisés

$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels	$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels	$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels
∞ infini	$\subset$ inclusion stricte dans un ensemble
$+\infty$ infini positif	$\subseteq$ inclusion au sens laerge dans un ensemble
$-\infty$ infini négatif	$\subset$ inclusion stricte dans un ensemble
$\div$ division	$\neq$ n'est pas égal
$\leq$ inférieur ou égale	$\geq$ supérieur ou égal
$\{$ délimite le début d'un ensemble	$\}$ délimite la fin d'un ensemble
$\in$ appartient	$\notin$ n'appartient pas
$\emptyset$ ensemble vide	$\bigcup$ réunion d'ensembles
$\bigcap$ intersection d'ensembles	$\exists$ il existe
$\forall$ quelque soit	$[a, b]$ intervalle compris entre a et b
$\Longrightarrow$ implique (si... alors)	$\Longleftrightarrow$ équivalent (si et seulement si)
$]a, b]$ intervalle compris entre a et b avec a exclu	$[a, b[$ intervalle compris entre a et b avec b exclu
$]a, b[$ intervalle compris entre a et b avec a et b exclus	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\int$ intégrale	$f(x)$ image de x par la fonction f
$\log_e a$ (ou alors $\ln a$) logarithme de x dans la base e	$\log_a x$ logarithme de x dans la base a
$\log x$ logarithme de x dans la base 10	$\|x\|$ valeur absolue de x
x^y x à la puissance y	$\sqrt{x}$ racine carrée de x
$\sqrt[n]{x}$ racine $n^{ème}$ de x	Δ delta
$f(x) = x^2$ parabole	$f(x) = \dfrac{1}{x}$ hyperbole

- **Les intervalles**

$$\begin{aligned}
&]a,a[=\emptyset; \quad [a,a]=\{a\}\\
&]a,b[\subset]a,b]\subset[a,b]; \quad]a,b[\subset[a,b[\subset[a,b]\\
&[a,b]\subset[a,+\infty]\cap]-\infty,b];\\
&]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}; \quad [0,+\infty[=\mathbb{R}_+\\
&]-\infty,0]=\mathbb{R}_-; \quad]0,+\infty[=\mathbb{R}_+^*\\
&]-\infty,0[=\mathbb{R}_-^*; \quad]-\infty,+\infty[-\{0\}=\mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

- **Quelques opérations élémentaires**

1. $a(b+c)=ab+ac$.
2. $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$.
3. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.
4. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$.
    - **Attention:** $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}\neq\dfrac{a+b}{c+d}$.
5. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

- **Formules de factorisation**

1. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.
2. $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$.
3. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.
4. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.
5. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

- **Exposants et radicaux**

1. $x^0 = 1$; $x^1 = x$.
2. $x^n = x \times x \times x \times x \times \cdots \times x$ (la multiplication par x est faite n fois).
3. $x^m x^n = x^{n+m}$.
4. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.
5. $(x^m)^n = x^{nm}$.
6. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.
7. $(xy)^n = x^n y^n$.
8. si $x^a = x^b$ alors $a = b$.
9. si $a = b$, alors $x^a = x^b$.
10. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.
11. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
12. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.
13. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.
14. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.
15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.

- **Les logarithmes**

On appelle logarithme décimal d'un nombre a (strictement positif) l'unique solution de l'équation $10^x = a$. On note cette solution par $\log a$.

Autrement dit, un logarithme est un exposant. La notation logarithmique est simplement une manière équivalente d'écrire des exposants.

Propriétés des logarithmes

1. $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$, logarithme en base a.
2. $\log x = \log_{10} x$. Si la base n'est pas mentionnée, le logarithme est en base 10.
3. $\ln x = \log_e x$ où $e = 2.71\ldots$, appelé nombre d'Euler (qui est un nombre irrationnel, tout comme π, $\sqrt{2}$, etc).
4. $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$.
5. $\log_a x = \log_a y$ alors $x = y$.
6. $x = y$ alors $\log_a x = \log_a y$.
7. $\log_a = \log_a b$ alors nous avons obligatoirement $a = b$.
8. $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$.
9. $\log_a x^n = n \log_a x$.
10. $\log_a a = 1$.
11. $\log_a 1 = 0$.
12. $\log_a 0$ est une valeur négative qui tend vers $-\infty$.

Les polynômes

• Un polynôme de degré n est de la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, les coefficients du polynôme, sont des constantes réelles. Par exemple, l'expression suivante:

$$5x^9 + 10x^2 + x + 10$$

est un polynôme de degré 9 ayant les coefficients suivants: $a_9 = 5$ pour x^9, $a_2 = 10$ pour x^2, $a_1 = 1$ pour x et $a_0 = 10$. Les autres coefficients sont tous nuls.

• Une racine (ou un zéro) d'un polynôme est une valeur de x qui l'annule. Par exemple, une racine de $x^2 - 2x + 1$ est la valeur $x = 1$, car si nous remplaçons x par la valeur 1 dans $x^2 - 2x + 1$, on obtient: $(1)^2 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

• si r est une racine de $P(x)$ alors $(x - r)$ divise $P(x)$. Autrement dit, nous avons

$$P(x) = (x - r) \times Q(x),$$

où $Q(x)$ (le quotient) peut être trouvé en procédant à la division proporement dite de $P(x)$ par $(x - r)$.

• Un polynôme de degré n possède au plus n racines.

• si $r_1, r_2, \cdots, r_n$ sont les racines de $P(x)$ alors $P(x)$ peut se factoriser de la manière suivante:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_n). \tag{1}$$

• Un polynôme de degré 1 est de la forme $P(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$. Il possède une seule racine qui est

$$x = -\frac{b}{a}$$

Autrement dit, la solution de l'équation

$$ax + b = 0$$

admet la solution suivante, à condition que la $a \neq 0$:

$$x = -\frac{b}{a}$$

• Un polynôme de degré 2 est de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

Ce polynôme possède au plus deux racines. Autrement dit, la solution de l'équation suivante:

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0$$

est obtenue comme suit:

1. On détermine d'abord la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Ensuite, si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ ne possède pas de racine réelle.

3. Si maintenant $\Delta \geq 0$, alors $P(x)$ possède deux racines distinctes x_1 et x_2 déterminées par les formules suivantes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

4. Et si $\Delta = 0$ alors les deux racines sont identiques. On dit que le polynôme possède une racine double, déterminées par la formule suivante::

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

• Si $P(x)$ est un polynôme de degré ≥ 3, alors il n'existe pas de règle pour trouver ses racines, telle celle qu'on vient de voir pour les polynômes du second degré. Toutefois, on peut essayer la démarche suivante:

1. deviner (si on arrive) une racine de ce polynôme.

2. si c'est le cas, alors ce polynôme est divisible par $x - r_1$, où r_1 est la racine qu'on vient de deviner.

3. procéder à la division proprement dite de ce polynôme par $x - r_1$.

4. Soit $Q(x)$ le quotient trouvé par cette division à l'étape (3).

5. Aller à l'étape (1) pour refaire le même procédé mais en remplaçant $P(x)$ par $Q(x)$, jusqu' à ce qu'on arrive à un quotient de degré 2. Dans ce cas, nous pouvons trouver les deux racines en appliquant la méthode du Delta.

Exemple: Trouver les racines de $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

1. Il est facile de vérifier que 1 est une racine de ce polynôme de degré 4. En effet, si on remplace x par 1, on trouve $P(1) = 0$. Autrement dit, $x - 1$ divise $P(x)$.

2. Procédons à la division de $P(x)$ par $x-1$. On obtient le quotient suivant: $Q(x) = x^3+x^2-2x-2$. On refait le même procédé mais avec $Q(x)$. Il est également facile de vérifer que -1 est une racine de $Q(x)$. En effet, $Q(-1) = 0$.

3. Procédons à la division de $Q(x)$ par $x+1$. On obtient le quotient suivant: $Q_2(x) = x^2-2$. Dans ce cas, $Q_2(x)$ est de degré 2. On trouve ses racines à l'aide de la méthode du Delta. Elles sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$.

4. Nous pouvons conclure que $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

Faites attention de bien vérifier le coefficient du terme du plus haut degré. Dans ce cas, il est égal à 1. S'il était égal à -6, par exemple, alors on l'aurait rajouté dans la factorisation, comme c'est bien indiqué dans la relation (1).

• Résoudre une inégalité de la forme $P(x) < 0$) ou $P(x) > 0$,, où $P(x)$ est un polynône de degré n, ù revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $P(x) < 0$ ou $P(x) > 0$. Pour ce faire, il y a lieu de:

1. rendre sous forme d'un produit de facteurs $P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$ où les r_i sont les racines de $P(x)$.
2. construire un tableau où il faut inscrire en horizontal les racines de $P(x)$ dans l'ordre croissant
3. en vertical, pour chaque $(x - r_i)$, il est maintenant facile d'y inscrire les intervalles de valeurs pour lesquels ce terme est positif, nul et négatifs.
4. Faire le produit de tous les signes obtenus pour chacun des intervalles,
5. ensuite, prendre la ou les intervalles qui répondent à notre question, à savoir là où $P(x)$ est soit positif soit négatif.

Pour les polynômes $P(x)$ de degré 2, c'est-à-dire de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + x.$$

Nous procédons comme suit:

1. Trouver par la méthode du Delta lea deux racines r_1 et $r_2$de $P(x)$. Cela signifie que $P(x)$ pourra s'écrire comme suit:
$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x-r_1)(x-r_2).$$
Note: S'il advenait que $\Delta < 0$ pour $ax^2 + bx + x$, alors ce dernier ne peut pas se mettre sous la forme d'un produit de facteurs. Autrement dit, il n'est pas factorisable.
2. Nous avons alors le résultat suivant:
   (a) $P(x) = 0$ pour les valeurs de $x = r_1$ ou $x = r_2$,
   (b) $P(x)$ est du signe de a pour les valeurs de $x < r_1$ et $x > r_2$,

(c) $P(x)$ est du signe de $-a$ pour les valeurs de $x > r_1$ et $x < r_2$.

Attention: Il peut arriver que $\Delta < 0$. Dans ce cas, le signe du polynôme $ax^2 + bx + c$ est du signe du coefficient a. Autrement dit, si $a > 0$ alors $ax^2 + bx + c > 0$ et si $a < 0$ alors $ax^2 + bx + c < 0$.

• **La forme canonique du trinôme**: Le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut se mettre sous la forme suivante (dite forme canonique du trinôme):

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Exemple: si nous avons $x^2 - x - 6$ alors on peut le mettre sous la forme suivante:

$$x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Comme le premier terme du second membre est toujours positif (un carré), alors nous pouvons conclure que $x^2 + x - 6$ atteint sa plus petite valeur quand $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ est nul, c'est-à-dire au point $x = -\frac{1}{2}$. La valeur de $x^2 + x - 6$ en ce point est donc: $-\frac{25}{4}$.

Les fonctions numériques

Définition: Toute façon d'associer un élément x de l'ensemble (de départ) D un sous-ensmeble de $\mathbb{R}$ et un élément y de $\mathbb{R}$ est appelée fonction numérique, notée comme suit:

$$f: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x). \end{array}$$

• L'élément x est appelé antécédent de y par la fonction f.
• L'élément y est appelé image de x par la fonction f.
• Le domaine (de définition) d'une fonction f représente l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles cette fonction est bien définie. Il est souvent noté par $Domf$ (ou Df).

Exemple: Le domaine de définition de la fonction $f(x) = x^2$ est $\mathbb{R}$. En revanche, celui de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$ (la racine carrée des nombres négatifs n'est pas définie dans $\mathbb{R}$). Celui de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ est $\mathbb{R} - \{2\}$ (la fonction f n'est pas définie pour la valeur $x = 2$).
• L'image d'une fonction f représente l'ensemble des valeurs $y = f(x)$, avec $x \in Domf$. Cet ensemble est souvent noté par Imf.

Exemple: L'image de la fonction $f(x) = x$ est $\mathbb{R}$; celle de la fonction $f(x) = x^2$ est $\mathbb{R}_+$ ainsi que celle de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

Fonctions implicites et explicites: Quand la fonction f est donné sous la forme $y = f(x)$, on dit qu'elle st sous forme explicte. Quand elle est donné sous forme de $g(x, y) = 0$, alors on dit qu'elle est soous forme implicite. Par exemple, $y = 2x + 1$ est une forme explicite. En revanche, $2y + x - 1 = 0$ est une forme implicite.

Algèbre des fonctions: Soient les fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$.

1. On appelle fonction somme des fonctions f et g la fonction suivante:

$$f + g: \quad \begin{array}{l} A \cap B \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

2. On appelle fonction produit des fonctions f et g la fonction suivante:

$$fg: \quad \begin{array}{l} A \cap B \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (fg)(x) = f(x) \times g(x) \end{array}$$

3. On appelle fonction quotient des fonctions f et g la fonction suivante:

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}: \quad & A \cap B' \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ où } B' = \{x \in B : g(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

4. Soient deux fonctions numériques telles que l'image de la première fonction soit le domaine de la seconde fonction, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f &: A \to B, \\ g &: B \to C. \end{aligned}$$

où A, B et C sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

On appelle composée des fonctions f et g la fonction suivante:

$$\begin{aligned} f \circ g: \quad & A \cap B \to \mathbb{R} \\ & x \in A \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)). \end{aligned}$$

Par exemple si $f(x) = (x+2)^2$ et $g(x) = \sqrt{x+3}$, alors

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+3} = \sqrt{(x+2)^2+3} = \sqrt{x^2+2x+7}.$$

Alors que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x)+2)^2 = (\sqrt{x+3}+2)^2.$$

Fonctions surjectives, injectives, bijectives et inverses:

Fonction bijective: Une fonction est dite bijective si, et seulement si, elle est à la fois injective et surjective.

Fonction injective: Une fonction est dite injective si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée (en réalité c'est une seule condition):

$$\forall x_1, x_2 \in Domf, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

ou alors

$$\forall x_1, x_2 \in Domf, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En d'autres termes, une fonction injective est telle que à deux éléments distincts de l'ensemble de départ, cette fonction associe deux images distints ou alors à deux images identiques de la fonctions f, leurs antécédent sont également identiques.

Par exemple, si la fonction f est définie comme suit:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = x + 1 \end{aligned}$$

Cette fonction est injective: Soient x_1 et $x_1 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Autrement dit, nous avons $x_1 + 1 = x_2 + 1$. Cela implique que $x_1 = x_2$.

Si nous voulons utiliser l'autre définition, on procédera comme suit: Soient x_1 et $x_1 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \neq x_2$. En ajoutant 1 aux deux membres de cette inégalité, on obtient: $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$. Cela implique par définition de la fonction f que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Fonction surjective: Une fonction est dite surjective si, et seulement si, la condition suivantes est vérifiée.

$$\forall y \in Imf, \exists x \in Domf \text{ tel que } y = f(x)$$

En d'autres termes, une fonction est dite surjective, si quelque soit l'élément y de l'image de f, il existe toujours un antécédent $x \in Domf$ à y.

Par exemple, pour la fonction ci-dessus, prenons un élément y de Imf tel que $y = x + 1$. Cela implique que $x = y - 1$. Autrement dit, l'élément x existe tel que $y = f(x)$. C'est-à-dire, la fonction f est surjective. Comme elle est injective et surjective, elle est par conséquent bijective.

Fonction inverse: Soit f une fonction définie comme suit:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

La fonction f admet une fonction inverse si, et seulement si, elle est bijective. Dans ces conditions, la fonction inverse de f, notée par f^{-1}, est définie comme suit:

$$\begin{aligned} f: \quad & B \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f^{-1}(x). \end{aligned}$$

Par exemple si la fonction f est comme suit:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ & x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que cette fonction est bijective. Pour trouver sa fonction inverse, procédons comme suit:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$$

La fonction inverse est donc définie comme suit:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ & x \mapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$

La droite et son graphique

• L'équation d'une droite est de laforme suivante:

$$y = mx + b$$

• Le coeffcient m représente la pente de la droite.

• Par deux points donnés, ne peut passer qu'une et une seule droite.

• Pour trouver l'équation d'une droite, il suffit de connaître:

1. soit deux points, disons $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$.
2. soit la valeur de la pente m et un autre point, disons $A(x_1, y_1)$.

• La pente d'une droite passant par deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ est comme suit:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

• un point $A(x_1, y_1)$ d'une droite d'équation $y = mx + b$ vérifie cette équation. Autrement dit, nous avons:

$$y_1 = mx_1 + b$$

Ce remplacement sert à déterminer soit la valeur de m, soit celle de b.

• Deux droites sont perpendiculaires si, et seulement si, le produit de leur pente est égale à -1. Ainsi, si $y = m_1x + b_1$ et $y = m_2x + b_2$ sont deux droites. Alors si elles sont perpendiculaires, cela est équivalent à dire que $m_1 \times m_2 = -1$.

• Deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles ont la même leur pente. Ainsi, si $y = m_1x + b_1$ et $y = m_2x + b_2$ sont deux droites. Alors si elles sont parallèles, cela est équivalent à dire que $m_1 = m_2$.

• Pour tracer une droite dans un plan, il suffit de connaître deux de ses points. Pour faciliter les calculs, en général, on préfère choisir les deux point comme suit: le premier point est déterminé en mettant $x = 0$ dans l'équation $y = mx+b$, cela nous permet de déterminer la valeur de y. Le deuxième point est déterminé en mettant $y = 0$ dans léquation $y = mx + b$, cela nous permet de déterminer la valeur de x.

Le calcul des limites

• Le mot limite renvoie au concept d'approcher de plus en plus sans toutefois atteindre l'objet ou la valeur en question.

• On distingue deux manières d'approcher une valeur: à partir de la gauche et à partir de la droite.

• On dit qu'une fonction admet une limite à une valeur donnée si, et seulement si, la limite à gauche et la limite à droite à cette valeur sont égales.

• L'étude des limites de fonctions quand x tend vers une valeur donnée concerne le comportement de cette fonction au voisinage de cette dite valeur.

• Propriétés des limites: Posons $\lim\limits_{x \to b} f(x) = A$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = B$

1. $\lim\limits_{x \to b} (k \times f(x)) = k \times A$
2. $\lim\limits_{x \to b} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
3. $\lim\limits_{x \to b} (f(x) \times g(x)) = A \times B$
4. $\lim\limits_{x \to b} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{A}{B}$ avec $B \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x \to b} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to b} f(x)} = \sqrt[n]{A}$.

Quand le calcul des limites se fait sur des polynômes, alors des simplications sont à prévoir. En effet, soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ deux polynômes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{if } n \text{ est pair.} \\ -\infty & \text{if } n \text{ est impair.} \end{cases}$
3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n = \operatorname{sign}(a_n) \times \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n$.
4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m. \\ 0 & \text{si } n < m. \\ X & \text{si } n > m. \end{cases}$

où X est défini comme suit:
• Si $n-m$ est pair, alors

$$X = \text{sign}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \times \infty$$

• Si $n-m$ est impair, alors

$$X = \begin{cases} \text{sign}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \times -\infty \text{ si } x \to -\infty \\ \text{sign}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \times \infty \text{ si } x \to +\infty \end{cases}$$

Ne pas oublier que a_n et b_m sont les coéfficients de x^n et x^m dans les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ définis plus haut.

• Quelques propriétés à connaitre:

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\frac{1}{\infty} = 0.$$

• Les formes indéterminées sont comme suit:

$$\begin{array}{cc} \frac{0}{0}; & \frac{\infty}{\infty} \\ +\infty - \infty; & -\infty + \infty \\ 0 \times \pm\infty. & \end{array}$$

On contourne ces indéterminations en utilisant des théorèmes ou des artifices algébriques.

Remarque Les formes suivantes ne sont pas indéerminées:

1. $+\infty + \infty = +\infty$.
2. $-\infty - \infty = -\infty$.
3. $+\infty$ + constante $= +\infty$.
4. $-\infty$ + constante $= -\infty$.
5. $-\infty \times +\infty = -\infty$.

6. $+\infty \times +\infty = +\infty$.

7. $-\infty \times -\infty = +\infty$.

8. $+\infty \times -\infty = -\infty$.

9. $\infty \times$ constante $= \infty$.

• Quand on calcule une limite d'une fonction, quand x tend vers b (b étant une valeur donnée ou l'infini), dans un premier temps, on remplace x par b. Si ce calcul ne génère pas de forme indéterminée, alors la limite est le résultat de ce calcul. Si, en revanche, ce calcul génère une forme indéterminée, alors, dans ce cas, il y a lieu de lever cette indétermination.

•**Les asymptotes:** Une asymptote concerne le rapprochement à l'infini du graphique d'une fonction et d'une droite.

•**Définition:** Une droite est asymptote à une courbe si la distance des points de cette courbe à cette droite devient de plus en petite petite (tend vers 0) quand ce point s'éloigne vers l'infini ($-\infty$ ou $+\infty$).

Remarquez qu'une asymptôte peut exister quand vers $-\infty$ et ne pas exister vers $+\infty$, ou vice versa.

•**Définition:** Une fonction admet une asymptote verticale si l'équation de celle-ci est de la forme $x = b$. Dans ces conditions, l'une des égalités suivantes est vérifiée.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty, \text{ ou alors} \\
&\lim_{x \to b^+} f(x) = \pm\infty, \text{ ou alors} \\
&\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty.
\end{aligned}$$

En d'autres termes, chercher une une asymptôte verticale revient à trouver une valeur finie de x qui fait tendre la fonction vers l'infini quand x tend vers cette valeure finie.

•**Définition:** Une fonction admet une asymptote horizontale si l'équation de celle-ci est de la forme $y = b$. Dans ces conditions, l'une des égalités suivantes est vérifiée.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to -\infty} f(x) = b, \text{ ou alors} \\
&\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.
\end{aligned}$$

En d'autres termes, chercher une une asymptôte horizontale signifie que la fonction tend vers une valeur finie, quand x tend vers une valeur infinie. Il y a lieu de distinguer les deux cas: $infty$ et $+\infty$.

•**Définition:** La droite $y = ax + b$, $a \neq 0$, est asymptote à la courbe $y = f(x)$ si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

Condition 1.

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0; b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) \text{ cette valeur doit être finie.}$$

Condition 2.

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0; b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) \text{ cette valeur doit être finie.}$$

Si $a = 0$ ou $b = \infty$, alors on peut conclure qu'il n'existe pas d'asymptote oblique.

Exemple: Trouver les asymtotes verticale, horizontale et oblique de la fonction suivante:

$$y = f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

Pour trouver la ou les asymptote(s) verticale de $f(x)$, voyons voir la ou les valeur(s) de x pour lesquelles nous avons

$$\lim_{x\to ?} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} = \infty$$

Pour ce faire, il suffit d'avoir un zéro au dénominateur. Cela revient à dire que $x^2 - 2 = 0$. Cela donne $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$. Autrement dit, les deux asymptotes verticales sont: $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$, car pour ces deux valeurs, la fonction tends vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$ n'as pas d'importance.

Pour trouver l'asymptote verticale de $f(x)$, calculons

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{ indéterminé!}$$

Levons cette indetermination comme suit. Pour l'instant, on ne fait pas de distinction entre le $-\infty$ et $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 2} &= \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x^2})} \\
&= \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \\
&= |x| \times \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}
\end{aligned}$$

Rappelons que $\sqrt{x^2} = |x|$, et non juste x. Cela est dû au fait que $\sqrt{x^2} \geq 0$. Nous pouvons également écrire $x^2 = |x| \times |x|$, pour la même raison. En passant maintenant aux limites, on obtient ce qui suit:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{|x| \times \sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \frac{+\infty}{\sqrt{1-\frac{2}{+\infty}}} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

La limite n'étant pas finie, la courbe de $f(x)$ n'admet pas d'asymptote horizontale.

Rappelons qu'une asymptote oblique a pour équation: $y = ax + b$. Pour trouver cette asymptote, calculons d'abord le coefficient a comme suit:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-2)}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1-2/x^2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-2/x^2}}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux cas suivants:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-2/x^2}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(-x)\sqrt{1-2/x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(-1)\sqrt{1-2/x^2}} \\
&= \frac{1}{(-1)\sqrt{1-2/\infty}} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-2/x^2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x)\sqrt{1-2/x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1)\sqrt{1-2/x^2}} \\
&= \frac{1}{(1)\sqrt{1-2/\infty}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons trouvé deux valeurs pour a: $a = -1$ et $a = 1$. Ce qui implique que la courbe pourrait avoir deux asymptotes obliques. Mais, comme on va le voir plus loin, cette fonction n'en possède aucune.

Déterminons maintenant la valeur de b comme suit:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} + x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}}
\end{aligned}$$

Nous pourrions écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-2} &= \sqrt{x^2} \times \sqrt{1-2/x^2} \\
&= |x| \times \sqrt{1-2/x^2}
\end{aligned}$$

Donc, nous avons pour les x négatifs ($|x| = -x$):

$$\begin{aligned}
x^2 - x\sqrt{x^2-2} &= x^2 - x \times |x|\sqrt{1-2/x^2} \\
&= x^2 + x^2\sqrt{1-2/x^2} \\
&= x^2(1 + \sqrt{1-2/x^2}).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1+\sqrt{1-2/x^2})}{-x \times \sqrt{1-2/x^2}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\sqrt{1-2/x^2})}{-\sqrt{1-2/x^2}} \\
&= \frac{-\infty(1-\sqrt{1-2/-\infty})}{-\sqrt{1-2/\infty}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

La valeur de b n'étant pas finie, la courbe de $f(x)$ n'admet pas d'asymptote oblique quand x tend vers $-\infty$.

On refait les mêmes calculs pour la limite quand x tend vers $+\infty$ (cette fois-ci, nous avons bien $|x| = x$). On trouvera également b non fini ($b = +\infty$). On peut donc conclure que la courbe $f(x)$ n'admet pas d'asymptote oblique quand x tend vers ∞.

• Quand la fonction f est de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes de degré n et m, respectivement, alors, la courbe de la fonction f, dans ce cas, aura une asymptote oblique si, et seulement si, nous avons

$$n = m + 1$$

Pour avoir l'équation de cette asymptote oblique, on procède à la division proprement dite. L'équation de la droite est donnée par l'expression du quotient trouvé. Par exemple, si

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x + 2}$$

On voit bien que le degré du numérateur est 2 et celui du dénominateur est 1. étant donné que $n = m + 1$, nous pouvons donc utiliser le résultat ci-dessus.

En divisant $4x^2 + 2x + 1$ par $x + 2$, on obtient comme quotient:

$$Q(x) = 4x - 6.$$

Le reste de cette division est égale à:

$$R(x) = 13.$$

On peut donc écrire ce qui suit:

$$\frac{4x^2 + 2x + 1}{x + 2} = 3x - 1 + \frac{13}{x + 2}.$$

Par conséquent, on peut conclure que l'équation de l'asymptote est comme suit:

$$y = 3x - 1.$$

Continuité

• Définition: Une fonction f est dite continue au point $x = b$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

1. $f(b)$ est définie.

2. $\lim_{x \to b} f(x)$ existe.

3. $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.

   Par exemple, $f(x) = x^2 + 1$ est continue au point $x = 2$ car nous avons bien:
   i.) $f(2)$ est bien définie ($f(2) = 5$ en remplaçant x par 2 dans $x^2 + 1$).
   ii.) $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, et elle est égale à 5.
   iii.) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 5$.

• Une fonction est discontinue au point $x = b$ si au moins une des trois conditions ci-dessus n'est pas satisfaite. Par exemple, la fonction $\dfrac{1}{x-2}$ est discontinue au point $x = 2$ car $f(2)$ n'est pas définie (un zéro au dénominateur).
• Une fonction est continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ si, et seulement si, elle est continue sur chaque point de cet intervalle.
• Si le domaine de définition d'une fonction est ouvert $]a, b[$, alors la condition (2) ci-dessus n'est pas satisfaite. On dit que cette fonction est continue si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

• Propriétés algébriques des fonctions continues
Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continue au point $x = b$, alors

1. $f(x) \pm g(x)$ est continue au point $x = b$.

2. $f(x) \times g(x)$ est continue au point $x = b$.

3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue au point $x = b$, en supposant que $g(b) \neq 0$.

4. Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

• Propriétés graphiques des fonctions continues

1. Si une fonction est continue sur $[a, b]$, cela signifie que quelque soient deux points dans le graphe de cette fonction, il peuvent être joint par une courbe continue.

2. Si une fonction est continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés, alors le graphe de cette fonction coupe au moins une fois l'axe des x dans cet intervalle. Autrement dit, l'équaion $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $[a, b]$.

3. Si une fonction est continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \neq f(b)$, alors quelque soit la valeur c entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins une valeur de x, disons $x = x_0$, pour laquelle $f(x_0) = c$.

4. Si une fonction est continue sur $[a, b]$, alors f admet sur cet intervalle une valeur minimale et une valeur maximale.

Dérivée des fonctions algébriques

• Le taux de variation de la fonction $y = f(x)$ entre les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P(x, y)$ est:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

• Le taux de variation de la fonction $y = f(x)$ entre les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P(x, y)$ représente la pente de la droite passant par les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P(x, y)$. Une telle droite traversant la courbe de $f(x)$ est appelée **sécante**.

• Si on fait tendre le point P vers le point P_1, alors à la limite, la sécante PP_1 va occuper la place de la tangente au point P_1 et le taux de variation entre P_1 et P aura pour limite la pente de cette tangente. Lorsque la limite existe, cette pente vaut:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

• **Définition** On appelle dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point (x, y) la limite suivante, notée $f'(x)$, lorsqu'elle existe. On écrit:

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cette limite s'appelle également taux de variation instantané de la fonction $y = f(x)$ au point $P(x, y)$.

Remarque 1: Une fonction est dérivable sur $[a, b]$ si, et seulement si, la dérivée en chaque point de $[a, b]$ existe.

Remarque 2: Pour qu'une fonction soit dérivable sur $]a, b[$, il est nécessaire qu'elle soit continue sur $[a, b]$.

• **Dérivées de fonctions usuelles**

1. $y = f(x) = c$ (une constante): $y' = f'(x) = 0$.
2. $y = f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$: $y' = f'(x) = nx^{n-1}$.
3. $y = f(x) = x^a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$: $y' = f'(x) = ax^{a-1}$.
4. $y = (f(x))^a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$: $y' = af(x)^{(a-1)}f'(x)$.

Les exemples sont donnés durant la séance de cours; consulter également les notes de cours Tome 2.

- **Opérations sur les dérivées de fonctions**: Soient f et g deux fonctions dérivables, et $g(x) \neq 0$.

  1. $y = c \times f(x)$ (c étant une constante): $y' = c \times f'(x)$.
  2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
  3. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$.
  4. $(f(x) \times g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
  5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Les exemples sont donnés durant la séance de cours; consulter également les notes de cours Tome 2.

Construction de courbes

Dans cette partie, nous allons voir comment visulaiser sur un plan la courbe d'une fonction donnée. Nous avons besoin avant de quelques définitions.

Définition: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est croissante sur $[a, b]$ si, et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in [a, b]$, nous avons:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Définition: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est décroissante sur $[a, b]$ si, et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in [a, b]$, nous avons:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Définition: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est monotone sur $[a, b]$ si, et seulement si, elle est soit croissante, soit décroissante sur $[a, b]$.

Théorème 1: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. La fonction f est croissante sur $[a, b]$ si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 2: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. La fonction f est décroissante sur $[a, b]$ si, et seulement si, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 3: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, sauf peut-être au point $x = c$. Si les conditions suivantes sont satisfaites, alors la fonction f est à son maximum au point $x = c$.

1. $f'(x) > 0$ et $x < c$.
2. $f'(x) < 0$ et $x > c$.

Attention: On ne peut parler de point d'inflexion au point $x = c$ que si la fonction en question est continue en ce point.

Théorème 3: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, sauf peut-être au point $x = c$. Si les conditions suivantes sont satisfaites, alors la fonction f est à son minimum au point $x = c$.

1. $f'(x) < 0$ et $x < c$.
2. $f'(x) > 0$ et $x > c$.

Les deux théorèmes ci-dessous sont souvent utilisés dans le calcul des limites pour lever des indérminations. Ils sont connus sous le nom de Théorème de L'Hopital

Théorème 3.1: Soient f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ ayant une limite nulle en a. Si $g'(x)$ ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Théorème 3.2: Soient f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ ayant une limite infinie en a. Si $g'(x)$ ne s'annule pas sur $]a, b[$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Convexité: Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite convexe si, quelque soient x_1 et $x_2 \in]a, b[$, la droite reliant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est au-dessus de la courbe de $f(x)$.

Convexité: Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite concave si, quelque soient x_1 et $x_2 \in]a, b[$, la droite reliant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est au-dessous de la courbe de $f(x)$.

La dérivée seconde: La dérivée seconde d'une fonction f, notée f'', est la dérivée de la dérivée de la fonction f.

Théorème: Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$, est convexe sur $]a, b[$ si, et seulement si, $f''(x) \geq 0$, quelque soit $x \in]a, b[$.

Théorème: Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$, est concave sur $]a, b[$ si, et seulement si, $f''(x) \leq 0$, quelque soit $x \in]a, b[$.

Point d'inflexion pour le graphe d'une fonction numérique

Si, sur un point de la courbe représentative d'une fonction continue, la concavité passe du type convexe au type concave (ou l'inverse), on appelle ce point: **point d'inflexion de la courbe**.

Graphiquement, un point d'inflexion est un point où la tangente croise la courbe.

En un point d'inflexion la dérivée seconde, si elle existe, s'annule. Ceci permet de tester quels points sont points d'inflexion. Mais attention, cela ne permet pas de conclure sur la nature de ce point. En effet, par exemple, si $f(x) = x^3$, nous avons $f'' = 6x = 0$ pour $x = 0$. Dans ce cas, le point $(0,0)$ est un point d'infexion de la courbe de f. En revanche, pour $f(x) = x^4$, nous avons bien $f'' = 12x^2 = 0$ pour $x = 0$. Seulement, dans ce cas, le point $(0,0)$ n'est pas un point d'inflexion, mais plutôt un minimum de cette fonction.

Le théorème ci-dessous permet de conclure si un point donné est un point d'inflexion.

Théorème: Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$, sauf peut-être au point $x = c$. Si $f''(c) = 0$, ou $f''(c)$ n'existe pas, mais si dans les deux cas $f''(x)$ change de signe de par et d'autre de c, alors le point $(c, f(c))$ est un point d'inflexion.

Pour construire une courbe d'une fonction donnée f, on procède comme suit:

1. déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. déterminer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. déterminer les asymptotes de f.
4. déterminer la dérivée de f.
5. déterminer les intervalles où f est monotone (croissante, décroissante).
6. déterminer le maximum ou le minimum de f.
7. déterminer le ou les points d'inflexion de la fonction f.

Dans un premier temps, on rassemble les points ci-dessus sous forme d'un tableau (**tableau de variation** de la fonction f), sauf le point 7 (points d'inflexion) et les asymptotes. Ensuite, en s'appuyant sur ce tableau de variation, il ne reste plus qu'à dessiner la courbe de f.

Note: Pour faciliter le traçage de cette courbe, il est très utile de savoir où cette courbe va couper (s'il y a lieu) l'axe des x et l'axe des y. Pour le savoir, il suffit de mettre $y = 0$ pour l'axe des x et $x = 0$ pour l'axe des y.

Quelques fonctions particulières

• Fonction logarithme

1. L'argument d'une fonction logarithmique doit être toujours strictment positif; le logarithme d'un argument négatif ou nul n'existe pas. Ainsi, si $f(x) \leq 0$ alors $\log f(x)$ n'existe pas.

2. $\log_a 1 = 0$ quelque soit la base a.

3. Limites particulières:
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty.$$
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty.$$
$$\lim_{x \to 0^+} x \log_a x = 0.$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0.$$

4. Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n, alors
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a P(x) = \lim_{x \to +\infty} \log_a a_n x^n$$

5. Dérivées
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \text{ ln étant le logarithme en base } e$$
$$(\log_a f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

Les propriétés des fonctions logarithmes apportent un moyen puissant de dérivation. Soit l'exemple ci-dessous:

$$f(x) = x^x$$

Question: déterminer f'.

Procédons comme suit:

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

Maintenant, dérivons par rapport à x

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \log x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x,$$

d'où

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

• Fonction exponentielle

Définition: On appelle fonction exponentielle, la fonction puissance de base e; e étant le nombre transcendal de valeur $2.718\ldots$.

• calcul de limites

Nous pouvons facilement effectuer le calcul de limites sur les fonctions exponetielles, en passant par la fonction logarithme. En effet, nous savons que $e^{\ln x} = \ln x$ et $\ln e^x = x$. Toutefois, nous pouvons prendre pour acquis les résultats suivants:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n, alors

$$\lim_{x \to +\infty} e^{P(x)} = \lim_{x \to +\infty} e^{x^n}.$$

• Dérivées

1. $(e^x)' = e^x$.
2. $(e^{f(x)})' = f'(x) \times e^{f(x)}$.
3. $(a^x)' = a^x \times \ln a$.
4. $(a^{f(x)})' = \ln a \times f'(x) \times a^{f(x)}$

Calcul intégral

Définition On appelle différentielle de la variable indépendente x, la variable indépendante dx.

Définition On appelle différentielle de la fonction $y = f(x)$, la variable dépendante $y = f'(x)dx$.

Exemple: L'expression différentielle de la fonction $f(x) = x^2$ est $dy = d(x^2) = 2xdx$.

Intégral indéfinie: On dit que la fonction $F(x) + c$ (c étant une constante) est l'intégrale indéfinie de la fonction $f(x)$ si, et seulement si, $F'(x) = f(x)$. On note alors:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

On appelle aussi $F(x)$ la primitive de la fonction $f(x)$.

Remarque: La primitive d'une fonction $f(x)$ n'est pas unique. En effet, x^3, $x^3 + 4$, $x^3 + 100$ sont les primitives de la fonction $f(x) = 3x^2$. C'est pourquoi toutes les primitive de $f(x) = 3x^2$ sont décrites par l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int 3x^2dx = x^3 + c$$

où c est une constante réelle arbitraire.

Exemple: L'intégrale indéfinie de x^6 est $\dfrac{x^7}{7} + c$ car

$$\left(\frac{x^7}{7} + c\right)' = 7\frac{x^6}{7} = x^6$$

Formule d'intégration pour quelques fonctions particulières

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, pour tout $n \neq -1$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$.
3. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$.
4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$.

Opérations sur les intégrales

1. $\int kf(x)dx = c\int f(x)dx$, k étant une constante.
2. $\int (f(x)+g(x))du = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
3. $\int (f(x)-g(x))du = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Note: Pour simplifier le calcul d'intégrales, on pourrait oublier la constante c.

Quelques astuces d'intégration

1. **Changement de variables:** Le but est de se ramener à une intégrale connue par un changement de variables adéquat.

   Exemple 1

   $$\int \sqrt{2x+1}dx.$$

   Posons $u = 2x+1 \Longrightarrow du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{du}{2}$. Par conséquent, nous avons:

   $$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+1}dx &= \int \sqrt{u}\frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du \\ &= = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

   Exemple 2

   $$\int \frac{1}{3x+1}dx.$$

   Posons $u = 3x+1 \Longrightarrow du = 3dx \Longrightarrow dx = \frac{du}{3}$. Par conséquent, nous avons:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3x+1}dx &= \int \frac{1}{u}dx\frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du \\
&= \frac{1}{3}\ln u \\
&= \frac{1}{3}\ln(3x+1).
\end{aligned}$$

2. **Par parties:** Cette intégration est donnée par la formule suivante:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Remarque: Pour pouvoir utiliser cette formule, lors d'un calcul d'intégrales, il est nécessaire de bien définir les fonctions $f'(x)$ et $g(x)$. Certains choix peuvent aboutir à des solutions, alors que d'autres ne rendent que plus complexe l'intégrale de départ.

Exemple 1: Trouver l'intégrale suivante:

$$\int x \ln x dx$$

Posons

$$f'(x) = x \Longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$$
$$g(x) = \ln x \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} \\
&= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exemple 2: Soit l'intégrale suivante:

$$\int x^2 e^x dx$$

Posons

$$f'(x) = e^x \Longrightarrow f(x) = e^x$$
$$g(x) = x^2 \Longrightarrow g'(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= e^x \frac{x^2}{2} - \int e^x \frac{x}{2} \\ &= e^x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x e^x dx. \end{aligned}$$

Déterminons maintenant l'intégrale suivante:

$$\frac{1}{2} \int x e^x dx$$

Encore une fois, nous appliquons la même technique à cette intégrale.

Posons

$$f'(x) = e^x \Longrightarrow f(x) = e^x$$
$$g(x) = x \Longrightarrow g'(x) = 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x \\ &= x e^x - e^x = e^x (x-1). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= e^x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x e^x dx \\ &= e^x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} e^x (x-1) = \frac{1}{2} e^x (x^2 - x - 1). \end{aligned}$$

Intégrale définie ou le calcul de surface

Soient les droites verticales $x = a$ et $x = b$ et une fonctions $f(x)$ admettant une intégrale indéfinie, c'est-à-dire

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Définition L'intégrale définie de la fonction $f(x)$ pour les limtes d'intégration a et b est comme ci-dessous:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b + c = F(b) - F(a)$$

Théorème L'aire, A, de la surface comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple: Calculer l'aire de la surface, A, comprise entre la courbe d'équation $y = f(x) = 4 - x^2$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (4 - x^2)dx$$

Déterminons d'abord l'intégrale indéfinie

$$\int (4 - x^2)dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

Par conséquent,

$$A = \int_0^2 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}.$$

Exemple: Calculer l'aire de la surface, A, comprise entre la courbe d'équation $y = f(x) = (4 - x)^2$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (4 - x)^2 dx$$

Déterminons d'abord l'intégrale indéfinie en faisant le changement de variables suivant:

$$\int (4 - x)^2 dx$$

Posons $u = 4 - x \Longrightarrow du = -dx$.

$$\int (4-x)^2 dx = -\int u^2 du = \frac{u^3}{3} = -\frac{(4-x)^3}{3}$$

Par conséquent,

$$A = \int_0^2 (4-x)^2 dx = -\left[\frac{(4-x)^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{(4-2)^3}{3} + \frac{(4-0)^3}{3} = \frac{56}{3}.$$